2.) Aus dem Satz v. Cauchy folgt die „Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals“ und damit die Existenz von Stammfunktionen. !

Anwendung: Berechnung reeller Integrale
(Die Fresnelschen Integrale)

Beh: $$\boxed{\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Beweis: Sei $G := \mathbb{C}$ und

$$f(z) := \exp(-z^2)$$

Wir benutzen $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

(unser f ist holomorph)

für den folgenden geschlossenen Weg

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 ,$$

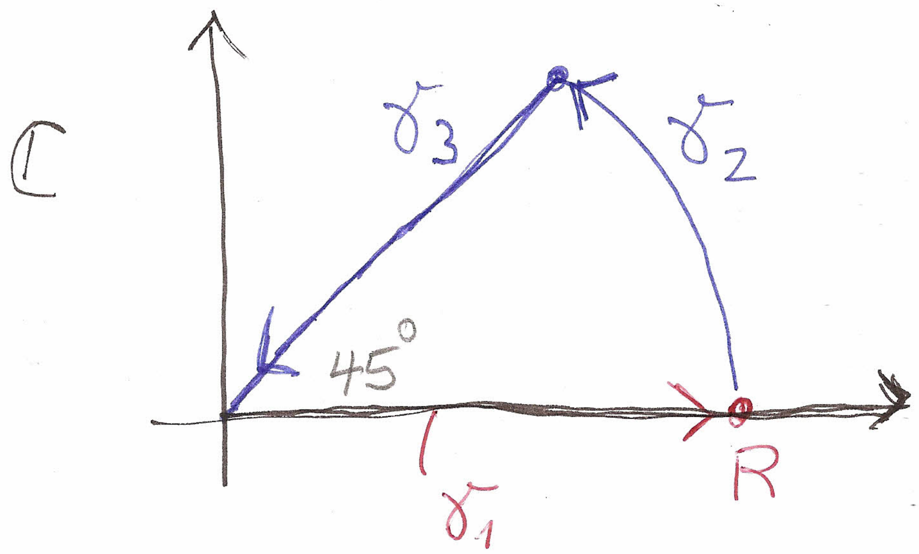
der sich aus 3 Stücken zusammensetzt:

Für $R > 0$ (später: $R \to \infty$) sei

$$\gamma_1(t) = t , \quad t \in [0, R]$$

$$\gamma_2(t) = R\, e^{it} , \quad t \in [0, \pi/4] ,$$

$$\gamma_3(t) = -t\, e^{i\pi/4} , \quad t \in [-R, 0] .$$



$\gamma_1 =$ Strecke von 0 nach R,

$\gamma_2 =$ Kreisbogen,

$\gamma_3 =$ Strecke zurück nach 0

Cauchy Integralsatz $\Longrightarrow$

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \quad (*)$$

mit:

1) $$\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

anspruchsvolle Rechnung!

vgl. Hildebrandt, Analysis 2, p. 37, Formel (21);

2.) $$\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz = \int_0^{\pi/4} \underbrace{\exp\left(-R^2 e^{2it}\right) i R e^{it}\,dt}$$

verhält sich wie

"$e^{-R^2}\cdot R$" ,

verschwindet also bei $R \longrightarrow \infty$;

3.) $$\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-R}^{0} \exp\left(-it^2\right) \cancel{t}\,dt$$

$$\left(\gamma_3(t)\right)^2 = t^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = it^2$$

$$= -\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \int_{-R}^{0} e^{-it^2}\,\cancel{t}\,dt$$

$$= -\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \int_{0}^{R} e^{-i\tau^2}\,\cancel{\tau}\,d\tau$$

"$\tau = -t$" und Vertauschung der Grenzen

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\int_0^R \left(\cos\tau^2 - i\sin\tau^2\right)d\tau$$

Aus ⊛ folgt mit $R \longrightarrow \infty$:

$$0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) \cdot \int_0^\infty \left(\cos\tau^2 - i\sin\tau^2\right)d\tau$$

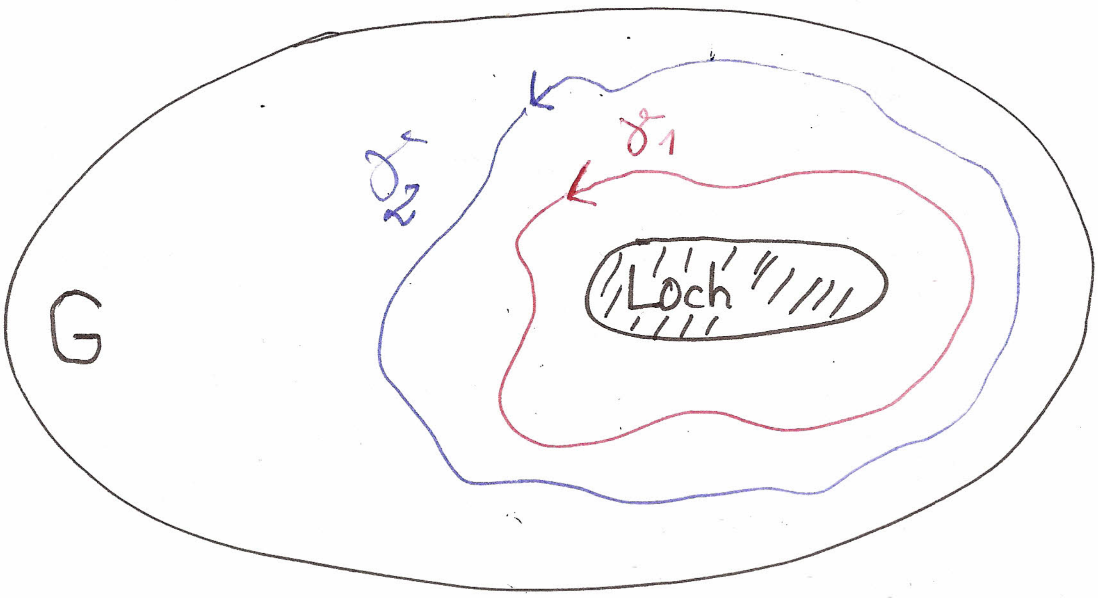
$$\overset{Re}{\underset{Im}{\Longrightarrow}} \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^\infty \cos\tau^2\,d\tau + \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^\infty \sin\tau^2\,d\tau \\ \underline{\text{und}} \\ \int_0^\infty \cos\tau^2\,d\tau = \int_0^\infty \sin\tau^2\,d\tau \end{cases}$$

Daraus folgt die Beh. /

Verallgemeinerungen des Cauchy Integralsatzes

(Anwendung im nächsten Abschnitt!)

Sei G ein beliebiges Gebiet, also nicht notwendig einfach zusammenhängend, etwa wie im Bild:



Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $\gamma_{1,2}$ gilt i. a.

$$\int_{\gamma_i} f(z)\,dz \neq 0,$$

<u>aber</u> man kann zeigen:

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

<u>Idee</u>: die beiden Wege γ_1, γ_2 lassen sich <u>innerhalb von G</u> <u>stetig</u> <u>ineinander</u> <u>deformieren</u>, und der Wert des Integrals ändert sich dabei nicht.

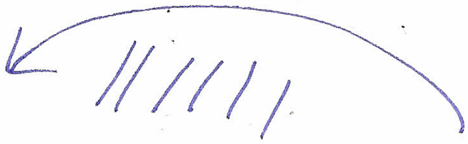
<u>eine wichtige Konsequenz</u>:

$$\boxed{\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i}$$

für <u>jeden</u> (<u>positiv orientierten</u>) Integrationsweg in $\mathbb{C} - \{0\}$, der den

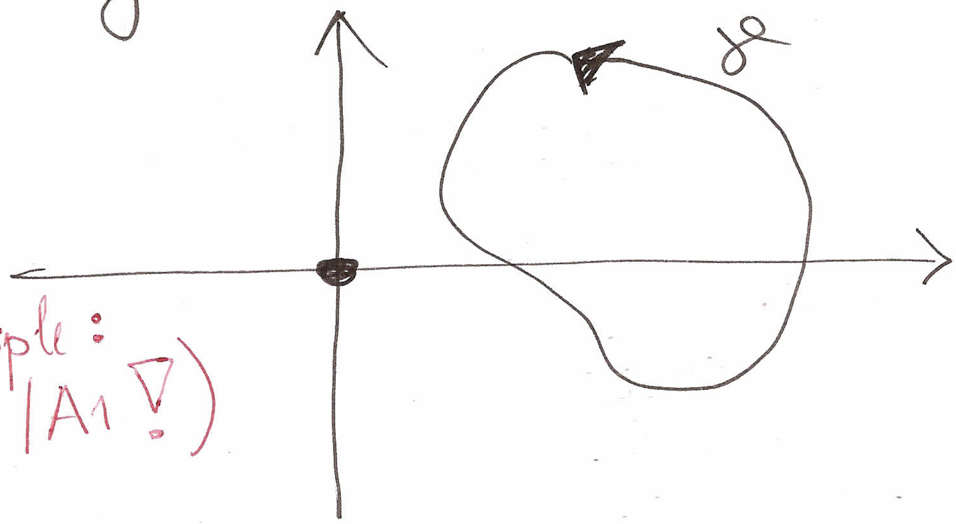
Ursprung im Inneren enthält.

„positiv orientiert" $\hat{=}$ das Innere liegt beim Durchlaufen der Kurve auf der linken Seite



Enthält γ den Nullpunkt nicht im Inneren, so ist (wieso?)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0.$$



(weitere Bsple: Blatt 3 / A1 !)

23.2 Die Cauchysche Integralformel

lautet für „die Kreisscheibe"

Satz 23.2.1:

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, und es gelte

$$\overline{B_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \mathcal{U}$$

für die offene Kreisscheibe $B_r(z_0)$.

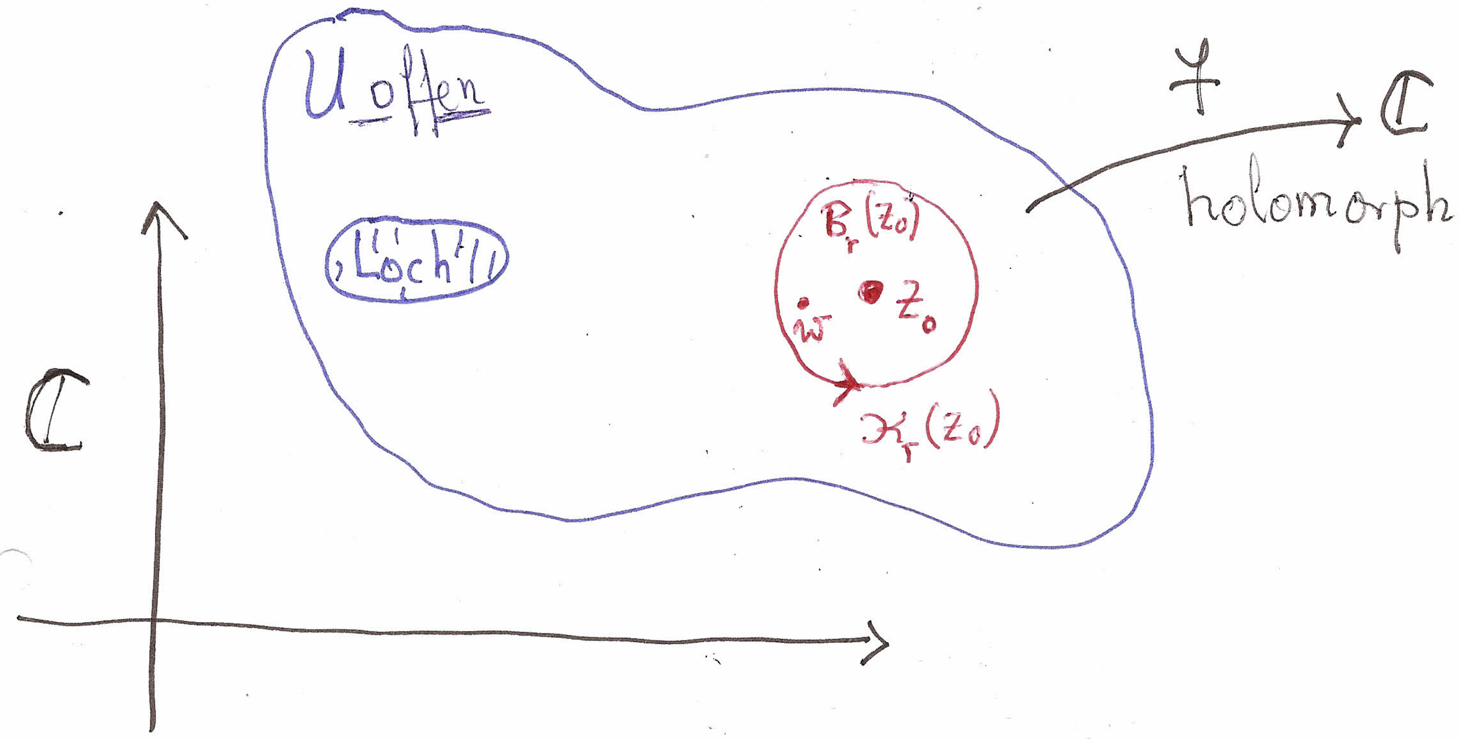
Für holomorphe $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ist dann

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - w} \, dz \quad \forall w \in B_r(z_0)$$

(speziell: $w = z_0$)

<u>Notation</u> (ab jetzt):

$\mathcal{K}_r(z_0)$ bezeichnet die Parametrisierung $[0,2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ der Kreislinie um z_0 mit Radius r (positiv orientiert).

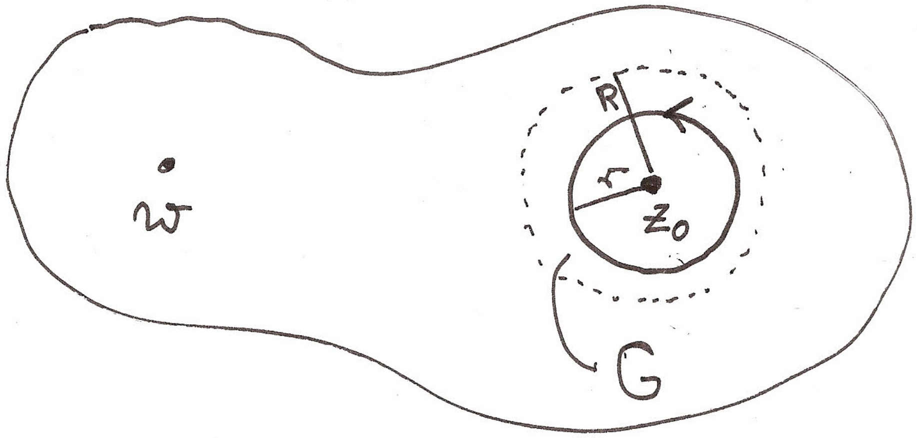


<u>Bem</u>: 1.) „Die Werte $f(w)$ <u>im Inneren</u> der Kreisscheibe werden <u>allein</u> durch die Werte von f <u>auf dem Rand</u> festgelegt."

Diese Aussage ist <u>völlig falsch</u> für $\boxed{\text{reell}}$ differenzierbare Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^2$ (auch wenn man diese als beliebig oft diff'bar annimmt)!

2)
$$\boxed{\begin{gathered} w \in U - \overline{B_r(z_0)} \Longrightarrow \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = 0 \end{gathered}}$$
!

<u>denn:</u>



die Fkt. $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z-w}$ ist dann nämlich holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Bereich

$G := B_R(z_0)$, R etwas größer als r,

und $\mathcal{K}_r(z_0)$ ist geschlossener Weg in G;

benutze dann den Integralsatz.

3.) Verallgemeinerung:

γ = geschlossener Integrationsweg, doppelpunktfrei, positiv orientiert

γ verläuft in einfach zusammenhängenden Teilbereich von U,

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorph $\Longrightarrow$

$$\boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz}$$

$\forall$ w aus dem von γ umschlossenen offenen Bereich